- مراجعات للحلقات
- المودول
- المودول الجزئي
- مجموع وتقاطع مودولات جزئية (الجمع المباشر)
- الارتباط والاستقلال الخطي
- الهومومورفيزمات المودولية
- [illegible]
- المتتاليات التامة
- المودولات النوثرية والارتينية
- المودولات نصف البسيطة
- المودولات الاسقاطية - المودولات الأغمارية

- المودول:

لتكن R حلقة واحدية ولتكن M زمرة آبلية بالنسبة للجمع (عمليتها) نعرف قانون تأثير خارجي على M بمؤثرات عناصر R الى يعرف التطبيق

$$f : R \times M \longrightarrow M$$
$$(\alpha, m) \longrightarrow \alpha(m)$$

يجب تحقق الشروط التالية

① $(\alpha+\beta)m = \alpha m + \beta m$

② $\alpha(m_1+m_2) = \alpha m_1 + \alpha m_2$

③ $(\alpha\beta)m = \alpha(\beta m)$

④ $1.m = m$

عندئذ نقول ان M مودول على R

$\forall \alpha, \beta \in R \quad , \forall m_1, m_2 \in M$

أي نقول أن M موديول على R إذا حقق الشروط الآتية

أولاً $(M,+)$ زمرة آبلية

1. $a+b\in M$
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\exists\ 0\in M\ ;\ a+0=0+a=a$
4. $\exists -a\in M\ ;\ a+(-a)=(-a)+a=0_m$
5. $a+b=b+a$

$\forall\ a,b\in M$ ، 0_m عنصر المحايد

ثانياً M معرف عليها قانون تأثير خارجي للعناصر من الحلقة R أي أنه

$\forall\ \alpha\in R\ ,\ m\in M\ ;\ \alpha m\in M$

بحيث يحقق الشرط

1. $(\alpha+\beta)m=\alpha m+\beta m$
2. $\alpha(m_1+m_2)=\alpha m_1+\alpha m_2$
3. $(\alpha\beta)m=\alpha(\beta m)$
4. $1.m=m$

---

* ملاحظات ونتائج:

• يدعى المديول M السابق R موديول يسارياً على R لأن العناصر R موضوعة على اليسار

بنفس الطريقة نعرف المديول اليميني على R ونرمز للمديول اليساري بـ $_{R}M$

• في بعض الكتب بعض المؤلفين لا يشترطون أن تكون الحلقة واحدية عندئذ لا معنى لوجود الشرط (4) وعندما تكون R واحدية يرمز للمديول بالمديول الواحدي.

بالنسبة لنا سنعتبر أن المودول المدروس مودول يساري واحدي إن لم يذكر خلاف ذلك.

• إذا أعطي حلقتان على تعريف المودول M يساريا ويمينيا على R بآن واحد أي:

$(s\cdot m)\cdot r = s\cdot(m\cdot r)$; $\forall s\in S$; $r\in R,\ m\in M$

• إذا كانت R حقل نحصل على فضاء متجه أي أن الفضاء المتجه هو حالة خاصة من المودول أي أن الفضاء المتجه هو مودول بينما العكس غير صحيح

• من كون M زمرة آبلية بالنسبة للجمع ينتج أن الجمع في M تبديلي وتجميعي ويوجد في M عنصر حيادي يدعى صفر المودول ويرمز له بـ 0_M فقط لتمييزه عن صفر الحلقة (الحيادي الجمعي في R)

• يمكن من الأحيان من خلال البحث يتم التمييز بين صفر الحلقة وصفر المودول وبالتأكيد صفر المودول وحيد لأن الحيادي في الزمرة وحيد.

كما أن لكل عنصر في M مثل m يوجد نظير جمعي $(-m)$

$$m+(-m) = (-m)+m = 0_M$$

وهو وحيد أيضا لأن النظير لكل عنصر في زمرة وحيد غالبا تدعى عناصر المودول M متجهات وعناصر الحلقة R سلميات (أعداد)

• مبرهنة (خواص عامة):

لكل $r \in R$ و $m \in M$ يكون:

1) $0_R \cdot m = 0_M$

2) $r\cdot 0_M = 0_M$

3) $(-r)m = r(-m) = -(rm)$

4) $r\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r m_i$

5) $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) m = \sum_{i=1}^{n} r_i m$

البرهان

(1)

$$0_R = 0_R + 0_R$$

$$0_R \cdot m = (0_R + 0_R) \cdot m = 0_R \cdot m + 0_R \cdot m$$

$$0_m + 0_R \cdot m = 0_R \cdot m + 0_R \cdot m$$

$$0_m = 0_R \cdot m$$

بطريقة مشابهة نبرهن (2)

---

(3)

$$r + (-r) = 0_R$$

$$(r + (-r)) \cdot m = 0_R\, m = 0_m$$

$$rm + (-r)\, m = 0_m$$

نضيف من الزمرة الآبلية M معكوسها صفر مودول

$$(-r) \cdot m = -(rm) \quad (4)$$

طريقة ثالثة

$$(m + (-m)) = 0_m$$

$$r(m + (-m)) = r \cdot 0_m = 0_m$$

$$rm + r(-m) = 0_m$$

نضرب في الزمرة الآبلية M بمعكوسها الجمعي لها بالنسبة
هذان عنصران متناظران بالنسبة لهذا القانون

$$r(-m) = -(r\, m) \quad (5)$$

ملاحظة
نستنتج أن:

$$(-r)\, m = r(-m) = -(rm)$$

أمثلة:

(1) كل حلقة واحدية يمكن اعتبارها أنها مودول على ذاتها.

---

② اذا كانت R حلقة دائرية معرفة [illegible]

$R = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ and } a_i \in R\}$

اثبت ان المجموعة R هي مجموعة من R بالنسبة [illegible]

المرتبة وعرفها عنصر من R

---

③ اذا كانت R حلقة دائرية وعرفنا $M_n(R)$ مجموعة المصفوفات

المربعة من الرتبة n [illegible] R [illegible] $M_n(R)$ [illegible]

بالنسبة لجمع المصفوفات وضربها R

---

④ اثبت صحة القضية التالية

اذا كانت M مثالية على R وكان $r \in R$ ، $m \in M$

فإن

$m = 0$ أو $r = 0$ $\Leftarrow$ $rm = 0$

[illegible]